

### Exercice 1

Montrer que la nature elliptique de la trajectoire d'une planète autour du soleil implique que l'attraction qu'elle subit est newtonienne

Indications : On considère le soleil comme fixe, la trajectoire de la planète est elliptique plane, un des foyers est le soleil et la force d'interaction soleil-planète est une force centrale. Nous utiliserons les coordonnées polaires dans le plan de l'ellipse. L'origine étant le foyer

### Exercice 2

Nous voulons étudier le mouvement d'une planète P, assimilée à un point matériel dans le champ de gravitation d'une étoile de masse  $M_E$  de centre O, considérée comme ponctuelle et fixe. La planète de masse  $M_P$  est située à une distance  $r = OP$  de O. Nous considérerons un référentiel lié à l'étoile comme un référentiel galiléen.

1. Exprimer la force exercée par l'étoile sur la planète en fonction des masses  $M_P$  et  $M_E$ ,  $r$ ,  $G$  la constante

universelle de gravitation et le vecteur unitaire  $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OP}}{r}$

2. Justifier précisément que le mouvement est plan. Préciser ce plan. On notera  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  la base de projection dans ce plan et  $\vec{e}_z$ , un vecteur unitaire suivant la direction du moment cinétique par rapport à O. Préciser

l'expression de  $\sigma_0$  en fonction de  $M_P$ ,  $r$  et  $\theta$ .

3. On suppose dans cette question que la planète décrit un mouvement circulaire de rayon  $R$  et de période  $T$ . On notera  $V_C$ , le module de la vitesse pour un mouvement circulaire.

3.1. Etablir l'expression de la vitesse de la planète,  $v_C$  en fonction de  $R$ ,  $G$  et  $M_E$

3.2. En déduire une relation entre  $R$ ,  $T$ ,  $G$  et  $M_E$  (quel nom porte cette loi).

3.3. En déduire l'énergie cinétique et l'énergie mécanique en fonction de  $G$ ,  $R$ ,  $M_P$  et  $M_E$ .

4. On rappelle que l'équation polaire d'une ellipse est  $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ . On se propose d'étudier le mouvement

de la planète à l'aide du vecteur excentricité  $\vec{e}$  (sens du mouvement):  $\vec{e} = \frac{\sigma_0}{G M_E M_P} \vec{V} - \vec{e}_\theta$

où  $\vec{V}$  est la vitesse de la planète. Le mouvement de P est dans le sens de  $\theta$  croissant.

4.1. Montrer que le vecteur excentricité  $\vec{e}$  est constant. Donner sa direction. Faire un schéma pour placer  $\vec{e}$

4.2. En faisant le produit scalaire  $\vec{e} \cdot \vec{e}_\theta$ , montrer que  $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$  et en déduire que le module de  $\vec{e}$  est

e. Préciser  $p$  en fonction de  $G$ ,  $M_E$ ,  $M_P$  et  $\sigma_0$ .

4.3. Préciser la valeur de l'excentricité pour un mouvement circulaire.

4.4. Dans le cas d'un mouvement circulaire, préciser la valeur de  $\sigma_0$  en fonction de  $R$ ,  $V_C$ , et  $M_P$ . Retrouver à l'aide du vecteur excentricité, l'expression de la vitesse  $V_C$  de la planète, en fonction de  $R$ ,  $G$ ,  $M_E$ .

### Exercice 3

- 1- On considère l'oscillateur constitué d'un ressort de raideur  $K$ , d'axe horizontal, dont l'une des extrémités est fixe et l'autre reliée à une masse  $m$  en mouvement sans frottement dans la direction horizontale fixe  $OX_0$
- Sachant que sous l'action d'une force d'intensité  $f = 160$  N, le ressort s'allonge de  $a = 10$  cm, déterminer l'expression et la valeur numérique de sa raideur  $k$ .
  - A l'instant  $t = 0$ , la masse  $m$  est abandonnée sans vitesse initiale à partir de la position A. Ecrire l'équation différentielle du mouvement et la résoudre pour trouver la loi du mouvement. On prendra  $m = 1$  Kg. Préciser les valeurs numériques de la pulsation propre  $\omega_0$  et de l'amplitude  $X_m$  du mouvement.
  - Déterminer les expressions et calculer les valeurs numériques de l'énergie potentielle maximale  $V_m$ , de l'énergie cinétique maximale du système et de l'énergie mécanique de ce système.



II- On considère le système mécanique constitué de la masse  $m$ , du ressort de raideur  $K$  précédemment calculée et d'un amortisseur de type visqueux de coefficient d'amortissement  $k'$  s'exerçant sur la masse  $m$ , la force de frottement  $\vec{F}_v = -k' \vec{V} (M/R_0)$

a- Ecrire l'équation différentielle du mouvement en posant :  $w_0^2 = k/m$  et  $\lambda = k'/2m$

Sachant qu'à l'instant initial  $t = 0$ ,  $x = a$ ,  $V_0 = 0$ , déterminer la loi du mouvement oscillatoire amorti après avoir précisé l'inégalité vérifiée par  $\lambda^2 - w_0^2$

b- Sachant que le rapport des amplitudes de la première oscillation à la sixième oscillation est de 10, déterminer la valeur numérique du décrement logarithmique  $\delta$ . En déduire les valeurs de  $\lambda$ , de  $k'$  et de la constante de temps  $\tau$  du système

III- Le système mécanique de la question 2 est maintenant supposé soumis à l'action de la force excitatrice

$$\vec{F}_e = 20 \cos(2w_0 t) \vec{x}_0$$

a- Ecrire l'équation différentielle du mouvement

b- Déterminer la loi du mouvement du régime permanent.

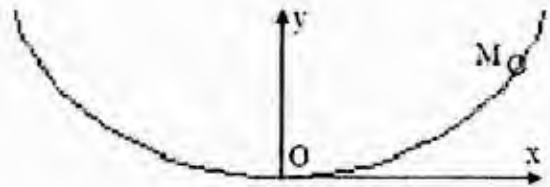
c- Préciser les expressions et donner les valeurs numériques de l'amplitude  $X_m$  et de la phase  $\phi$  de l'élongation  $x(t)$

### Exercice 4

1. Une cycloïde engendrée par un cercle de rayon  $b$ .

Un mobile pesant  $M$  assimilable à un point matériel de masse  $m$  coulisse sans frottement sur l'arc de cycloïde dessiné ci-contre. On repère sa position par ses coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  sur deux axes  $Ox$  horizontal et  $Oy$  vertical dirigé vers le haut. L'équation paramétrique de la cycloïde est :

$$x = b(\theta - \sin \theta) \quad y = b(1 - \cos \theta) \quad \text{ou } b \text{ est une constante et } \theta \text{ une variable dont la variation entre } -\pi \text{ et } \pi \text{ engendre l'arc. On note } g \text{ la pesanteur.}$$



1) Exprimer les coordonnées  $(dx, dy)$  d'un déplacement élémentaire du mobile en fonction de  $b$ ,  $\theta$  et  $d\theta$ .

2) En déduire la longueur  $ds$  de ce déplacement.

3) En déduire que l'abscisse curviligne  $s = \overline{OM}$  comptée positivement vers la droite, est :  $\theta = 4b \sin \frac{\theta}{2}$ .

4) Montrer que l'énergie potentielle associée à la force totale subie par le mobile est  $E_p = \frac{mgs^2}{8b}$ .

5) Exprimer l'énergie totale du mobile est en fonction de  $s$  et  $\dot{s}$ .

6) Dériver par rapport au temps cette expression et en déduire une équation différentielle du mouvement portant sur la fonction  $s(t)$ .

7) Déduire la nature du mouvement

8) A l'instant 0, le mobile est à la position correspondant à  $\theta = \theta_M$  avec une vitesse nulle. A quel instant  $t$  passe-t-il pour la première fois en O ? Avec quelle vitesse  $v$  ?

### Exercice 5

On considère le système  $S$  formé de deux points matériels A et B de même masse  $m/2$  reliés par une barre de masse supposée négligeable et de longueur  $(2l)$ . Ce système glisse sans frottement sur le point E d'une manche d'escalier OHE. Le point A est sur l'axe  $OX$  et est poussé vers H avec une vitesse constante  $V_A$ . Dans tout l'exercice, on suppose que le centre de masse G du système est situé à gauche de E et que le mouvement est observée dans le référentiel terrestre  $R (O, X, Y, Z)$  supposé galiléen (O point fixe,  $OH = a$ ,  $HE = h$ ,  $OX$  axe horizontal,  $OY$  axe vertical).

On repère  $S$  par l'angle  $\theta$  (voir figure).

a- Etablir les expressions de  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$  en fonction de  $\theta$  et de  $V_A$ .

b- Exprimer, dans la base cartésienne associé à  $R$ , en fonction de  $m$ ,  $h$ ,  $l$ ,  $V_A$  et  $\theta$ , la quantité du mouvement, le moment cinétique au point G et l'énergie cinétique de  $S$  dans  $R$





ETU SUP.com

Programmmation  
**Cours**  
Electricité  
Physique  
Résumés  
Analyse  
Livres  
**Exercices**  
Contrôles Continus  
Langues  
Thermodynamique  
Multimedia  
**Divers**  
Economie  
Travaux Dirigés  
Chimie Organique  
Informatique  
Optique  
Chimie  
Algèbre  
Corrigés  
Mathématiques  
Mécanique  
Travaux Pratiques  
Droit

et encore plus..